Normalenvektor

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} + s\vec{v}$ ist orthogonal zu beiden Spannvektoren:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{u} \bullet \vec{n} = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{n} = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0 \\ v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = 0 \end{array} \right|$$

Der Einfachheit halber werden hier keine Fallunterscheidungen vorgenommen.
In den Fällen, in denen hier mit 0 multipliziert wird oder ein Nenner gleich 0 ist, kommt man mit allgemeineren Überlegungen zum gleichen Ergebnis.

$$\left| \begin{array}{l} u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = 0 \\ v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} v_1 \cdot \mathrm{I} \\ u_1 \cdot \mathrm{II} \end{array} \left| \begin{array}{l} u_1 v_1 n_1 + u_2 v_1 n_2 + u_3 v_1 n_3 = 0 \\ u_1 v_1 n_1 + u_1 v_2 n_2 + u_1 v_3 n_3 = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} \mathrm{I} : v_1 \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \end{array} \left| \begin{array}{lcccccc} u_1 n_1 & + & u_2 n_2 & + & u_3 n_3 & = 0 \\ & & (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_2 & + & (u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot n_3 & = 0 \end{array} \right|$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \\ \mathrm{II} \end{array} \left| \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{-u_2 n_2 - u_3 n_3}{u_1} \\ \\ n_2 = \dfrac{(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot n_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \end{array} \right|$$

Wähle $\quad n_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1, \quad$ dann liefern

II: $\quad n_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 \quad$ und

I:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) - u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1} \\ &= \frac{u_1 u_2 v_3 - u_2 u_3 v_1 + u_2 u_3 v_1 - u_1 u_3 v_2}{u_1} \\ &= \frac{u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2}{u_1} \\ &= \frac{u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2)}{u_1} \\ &= u_2 v_3 - u_3 v_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \text{ ist also ein Normalenvektor der Ebene E.}}$$

Kreuzprodukt

Definition:

Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$ heißt <u>das Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$</u>.

Eigenschaften des Kreuzprodukts

(1) Das Kreuzprodukt ist orthogonal zu beiden Vektoren, aus denen es gebildet wird:
$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}\ \wedge\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.

(2) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (ohne Beweis).

(3) Der Betrag $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ des Kreuzprodukts entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$.

Beweise

(1) $$\vec{a}\times\vec{b}\bullet\vec{a}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_1a_2b_3+a_1a_3b_2-a_2a_3b_1=0$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\bullet\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_2b_1b_3-a_3b_1b_2+a_3b_1b_2-a_1b_2b_3+a_1b_2b_3-a_2b_1b_3=0$$ qed.

(3) $$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\right|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=a_2^2b_3^2-2a_2b_2a_3b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1b_1a_3b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2$$

$$=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2$$
$$-a_1^2b_1^2-a_1b_1a_2b_2-a_1b_1a_3b_3-a_2b_2a_1b_1-a_2^2b_2^2-a_2b_2a_3b_3-a_3b_3a_1b_1-a_3b_3a_2b_2-a_3^2b_3^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$-a_1b_1\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)-a_2b_2\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)-a_3b_3\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\bullet\vec{b})^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\cos^2\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left(1-\cos^2\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]\right)=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\sin^2\left[\varphi(\vec{a};\vec{b})\right]$$ qed.